Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Dédié au 60ième anniversaire de M. le professeur L. Rédei

Le but de cet article est de montrer que toute contraction T de l'espace de Hilbert est la somme orthogonale[1]) d'une transformation unitaire $T^{(u)}$ et d'une contraction "complètement non-unitaire" $T^{(0)}$ et d'étudier la dilatation unitaire $U^{(0)}$ de $T^{(0)}$. On verra que $U^{(0)}$ est unitairement équivalente à une somme orthogonale $\bigoplus\limits_{\omega} V(M_\omega)$ où $V(M_\omega)$ désigne la multiplication par $e^{i\theta}$ dans l'espace $L^2(M_\omega)$ des fonctions $f(\theta)$ définies dans l'ensemble mesurable $M_\omega \subseteq [0, 2\pi]$. Des résultats analogues seront obtenus pour les semi-groupes à un paramètre de contractions.

1. Cas d'une seule contraction

Rappelons[2]) que pour toute contraction T de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ il existe une transformation unitaire U d'un espace de Hilbert $\mathfrak{K}$ contenant $\mathfrak{H}$ comme un sous-espace, telle qu'on ait

$$T^n = \mathrm{pr}_{\mathfrak{H}}\, U^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

et que $\mathfrak{K}$ soit sous-tendu par les éléments de la forme $U^n h$ $(h \in \mathfrak{H};\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. La structure $\{\mathfrak{K}, U, \mathfrak{H}\}$ est déterminée à isomorphie près; U s'appelle la *dilatation unitaire* de la contraction T.

Faisons la remarque évidente que la dilatation unitaire d'une somme orthogonale $\bigoplus\limits_{\omega} T^{(\omega)}$ de contractions est égale à la somme orthogonale $\bigoplus\limits_{\omega} U^{(\omega)}$ des dilatations unitaires correspondantes.

Une transformation linéaire bornée T de l'espace $\mathfrak{H}$ sera appelée *complètement non-unitaire* si pour tout élément $h \neq 0$ de l'espace $\mathfrak{H}$ les quantités

$$\|Th\|, \|T^2 h\|, \ldots, \|T^n h\|, \ldots; \quad \|T^* h\|, \|T^{*2} h\|, \ldots, \|T^{*n} h\|, \ldots$$

ne sont pas toutes égales à $\|h\|$.

---

1) Ou "somme directe".

2) Cf. les articles précédents [2—5].

Théorème 1.[3]) *A toute contraction T de l'espace $\mathfrak{H}$ correspond une décomposition de $\mathfrak{H}$ en somme orthogonale de deux sous-espaces orthogonaux complémentaires $\mathfrak{H}^{(u)}$ et $\mathfrak{H}^{(0)}$ réduisant T et tels que la partie de T dans $\mathfrak{H}^{(u)}$ est une transformation unitaire $T^{(u)}$ et sa partie dans $\mathfrak{H}^{(0)}$ est une contraction complètement non-unitaire $T^{(0)}$. Cette décomposition est unique, $\mathfrak{H}^{(u)}$ étant constitué des éléments h pour lesquels*

(1) $$\|T^n h\| = \|h\| = \|T^{*n} h\| \quad \textit{pour} \quad n = 1, 2, \ldots .\text{[4])}$$

$T^{(u)}$ et $T^{(0)}$ seront appelées la *partie unitaire* et la *partie complètement non-unitaire* de T.

Démonstration. Soit U la dilatation unitaire de T. Envisageons l'ensemble $\mathfrak{H}^{(u)}$ des éléments h de $\mathfrak{H}$ vérifiant (1). Comme on a $T^n h = PU^n h$[5]) et $T^{*n} = PU^{-n}h$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, et comme $\|U^n h\| = \|h\|$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ puisque U est unitaire, la condition (1) est équivalente à ce que

$$U^n h \in \mathfrak{H} \quad \text{pour} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Cela veut dire que

(2) $$\mathfrak{H}^{(u)} = \bigcap_{-\infty < n < \infty} U^{-n}\mathfrak{H}.$$

La formule (2) met en évidence que $\mathfrak{H}^{(u)}$ est un sous-espace de $\mathfrak{H}$ qui est appliqué par U et par U^{-1} sur lui-même. Comme dans $\mathfrak{H}^{(0)}$ U coïncide avec T et U^{-1} avec T^*, il en résulte que $\mathfrak{H}^{(u)}$ réduit T, et que la partie $T^{(u)}$ de T dans $\mathfrak{H}^{(u)}$ est unitaire. La partie de T dans le sous-espace complémentaire $\mathfrak{H}^{(0)}$, soit $T^{(0)}$, est alors — par la définition même de $\mathfrak{H}^{(u)}$ — complètement non-unitaire. Si $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \oplus \mathfrak{H}''$ est une décomposition quelconque de $\mathfrak{H}$ en somme orthogonale de deux sous-espaces réduisant T, tels que la partie de T dans $\mathfrak{H}'$ soit unitaire et la partie dans $\mathfrak{H}''$ complètement non-unitaire, la condition (1) est vérifiée pour tous les éléments de $\mathfrak{H}'$ (puisque T y est unitaire), donc $\mathfrak{H}' \subseteq \mathfrak{H}^{(u)}$, et s'il y avait dans $\mathfrak{H}^{(u)}$ un élément $h \neq 0$, orthogonal à $\mathfrak{H}'$, h devrait appartenir à la fois à $\mathfrak{H}^{(u)}$ et à $\mathfrak{H}''$, ce qui est impossible puisque dans $\mathfrak{H}''$, T est complètement non-unitaire. Donc $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}^{(u)}$, $\mathfrak{H}'' = \mathfrak{H}^{(0)}$, ce qui achève la démonstration.

La dilatation unitaire de T est alors égale à $T^{(u)} \oplus U^{(0)}$ où $U^{(0)}$ est la dilatation unitaire de $T^{(0)}$, définie dans un espace $\mathfrak{K}^{(0)} \supseteq \mathfrak{H}^{(0)}$. Cela impose le

---

[3]) Ce théorème a été établi indépendamment aussi par M. Heinz Langer (Dresden), *voir* sa Note à paraître dans les *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*

[4]) $\mathfrak{H}^{(u)}$ ou $\mathfrak{H}^{(0)}$ peut se réduire au seul élément 0.

[5]) On désignera par P toujours la projection orthogonale sur $\mathfrak{H}$, sous-espace de l'espace de dilatation $\mathfrak{K}$.

problème d'étudier les dilatations unitaires des contractions complètement non-unitaires de plus près.

Théorème 2. *La dilatation unitaire U d'une contraction complètement non-unitaire T a son spectre absolument continu. D'une manière plus précise, U est unitairement équivalente à une somme orthogonale de type $\bigoplus_{\omega\in\Omega} V(M_\omega)$ où $V(M_\omega)$ désigne la multiplication par $e^{i\theta}$ dans l'espace $L^2(M_\omega)$ des fonctions $f(\theta)$ définies dans un ensemble mesurable $M_\omega \subseteq [0, 2\pi]$.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{K}$ les espaces de Hilbert où T et U sont définies et soit $U=\int_0^{2\pi} e^{i\theta} dE_\theta$ la décomposition spectrale de U, la famille spectrale $\{E_\theta\}$ étant choisie continue de droite et telle que $E_0 = E_{+0} = O$ (la transformation nulle de l'espace $\mathfrak{K}$). L'assertion que U a son spectre absolument continu veut dire que pour tout $f\in\mathfrak{K}$ la fonction numérique non-décroissante $(E_\theta f, f)$ est absolument continue dans l'intervalle $0\leqq\theta\leqq 2\pi$.

Soit $\{E(\sigma)\}$ la mesure spectrale engendrée par la famille spectrale $\{E_\theta\}$, définie pour tout ensemble borélien $\sigma\subseteq[0, 2\pi]$, c'est-à-dire que

$$E(\sigma)=\int_0^{2\pi} \chi(\sigma;\theta)\, dE_\theta$$

où $\chi(\sigma;\theta)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble σ.

En désignant la mesure de Lebesgue d'un ensemble borélien σ par $m(\sigma)$, montrons tout d'abord que pour un ensemble σ *fermé* et de mesure $m(\sigma)=0$ on a $E(\sigma)=O$.

Nous faisons usage à cette fin du fait qu'il existe une fonction à valeurs complexes $u(\sigma;\lambda)$ vérifiant les conditions suivantes: elle est continue dans le disque fermé unité

$$S_0=\{\lambda: |\lambda|\leqq 1\}$$

du plan des nombres complexes, holomorphe dans l'intérieur de S_0, égale à 1 aux points $\lambda=e^{i\theta}$ de la circonférence pour lesquels $\theta\in\sigma$, et de module plus petit que 1 en tous les autres points λ de S_0. L'existence de telle fonction a été démontrée par F. et M. Riesz ([1], p. 36—37); ils sont partis d'une construction due à Fatou.

On a pour tout $f\in\mathfrak{K}$, par le théorème de Lebesgue,

$$\|[u(\sigma;U)]^n f - E(\sigma)f\|^2 = \int_0^{\pi 2} |[u(\sigma;e^{i\theta})]^n - \chi(\sigma;\theta)|^2 d(E_\theta f, f) \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

donc

$$[u(\sigma;U)]^n \to E(\sigma)$$

et par conséquent

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{H}}[u(\sigma;\, U)]^n \to \mathrm{pr}_{\mathfrak{H}} E(\sigma) = B(\sigma).$$

Or on a, par le calcul fonctionnel développé dans l'article [5],

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{H}}[u(\sigma;\, U)]^n = [u(\sigma;\, T)]^n,$$

donc

$$[u(\sigma;\, T)]^n \to B(\sigma),$$

ce qui entraîne que $[B(\sigma)]^2 = \lim [u(\sigma;\, T)]^{2n} = B(\sigma)$. Comme de plus $B(\sigma)$ est une transformation autoadjointe de l'espace $\mathfrak{H}$, il résulte que $B(\sigma)$ est une projection orthogonale de $\mathfrak{H}$ sur un certain sous-espace $\mathfrak{H}(\sigma) \subseteq \mathfrak{H}$. $\mathfrak{H}(\sigma)$ réduit T puisque, en vertu de la propriété multiplicative de calcul fonctionnel mentionné, on a

$$T[u(\sigma;\, T)]^n = [u(\sigma;\, T)]^n T,$$

ce qui donne à la limite $(n \to \infty)$:

$$TB(\sigma) = B(\sigma)T.$$

En désignant par σ_θ la partie de l'ensemble σ située dans l'intervalle $[0, \theta]$, σ_0 sera aussi un ensemble fermé et de mesure $m(\sigma_\theta) = 0$, donc $B(\sigma_0) = \mathrm{pr}_{\mathfrak{H}} E(\sigma_\theta)$ sera par la même raison une projection orthogonale de $\mathfrak{H}$ sur un sous-espace de $\mathfrak{H}$. Il résulte de la relation $E(\sigma_\theta) = E(\sigma) E_\theta = E_0 E(\sigma)$ que $E(\sigma_0)$ est une fonction non-drécroissante de θ dans l'intervalle $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, continue de droite et telle que $E(\sigma_0) = O$, $E(\sigma_{2\pi}) = E(\sigma)$. Ces propriétés de $E(\sigma_0)$ se transmettent aussi à $B(\sigma_0)$, donc, considéré dans $\mathfrak{H}(\sigma)$, $\{B(\sigma_\theta)\}$ est une famille spectrale et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} e^{i0}\, d_0 B(\sigma_\theta)$$

est une transformation unitaire. Or cette transformation unitaire de $\mathfrak{H}(\sigma)$ est égale à la partie de T dans $\mathfrak{H}(\sigma)$; en effet on a pour $h \in \mathfrak{H}(\sigma)$:

$$Th = PUh = \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\, dPE_\theta E(\sigma)h = \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\, dPE(\sigma_\theta)h = \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\, dB(\sigma_\theta)h.$$

La partie de T dans $\mathfrak{H}(\sigma)$ est donc unitaire. Comme T était supposée complètement non-unitaire, on a nécessairement $\mathfrak{H}(\sigma) = (0)$, donc $B(\sigma) = O$ ou, ce qui ce qui revient au même, $PE(\sigma)P = O$ (dans $\mathfrak{K}$). Cela entraîne que $E(\sigma)P = O$ (parce que $[E(\sigma)P]^* E(\sigma)P = PE(\sigma)P = O$). Comme $E(\sigma)$ et U permutent, on a donc pour tout $h \in \mathfrak{H}$ et tout entier n

$$E(\sigma)U^n h = E(\sigma)U^n Ph = U^n E(\sigma)Ph = 0.$$

Vu que les éléments de la forme $U^n h$ ($h \in \mathfrak{H}$, n entier) sous-tendent l'espace $\mathfrak{K}$, on en conclut que $E(\sigma) = O$.

Ainsi on a démontré que pour tout ensemble fermé σ de mesure $m(\sigma) = 0$ on a $E(\sigma) = O$.

Il s'ensuit que pour tout $f \in \mathfrak{K}$ la fonction $(E_\theta f, f)$ est absolument continue. En effet, cette fonction non-décroissante engendre la mesure de Lebesgue—Stieltjes $m_f(\sigma) = (E(\sigma)f, f)$ pour les ensembles boréliens σ, donc ce qu'il faut montrer c'est que $m(\sigma) = 0$ entraîne $m_f(\sigma) = 0$. En cas contraire il y aurait un ensemble borélien σ et un $f \in \mathfrak{K}$ tels que $m(\sigma) = 0$, $m_f(\sigma) > 0$, et alors — en vertu de la régularité de la mesure de Lebesgue—Stieltjes — il y aurait aussi un ensemble *fermé* σ' ($\subseteq \sigma$) pour lequel $m(\sigma') = 0$ et $m_f(\sigma') > 0$, ce qui contredit à ce que $E(\sigma') = O$.

Le reste de la démonstration est un raisonnement usuel dans la théorie de la multiplicité spectrale. On choisit dans $\mathfrak{K}$ un ensemble $\{f_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ d'éléments $\neq 0$ tels que

$$\mathfrak{K} = \bigoplus_{\omega \in \Omega} \mathfrak{M}_\omega,$$

$\mathfrak{M}_\omega$ désignant le sous-espace de $\mathfrak{K}$ sous-tendu par les éléments $U^n f_\omega$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Ces sous-espaces réduisent U et en désignant par U_ω la partie de U dans $\mathfrak{M}_\omega$ on a $U = \bigoplus_{\omega \in \Omega} U_\omega$. Soit $\mathfrak{M}_\omega^0$ l'ensemble linéaire, partout dense dans $\mathfrak{M}_\omega$, formé par les sommes finies de la forme

$$\sum_n c_n U^n f_\omega.$$

De la relation

$$(U^n f_\omega, U^m f_\omega) = (U^{n-m} f_\omega, f_\omega) = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d(E_\theta f_\omega, f_\omega)$$

il s'ensuit, en posant

$$p_\omega(\theta) = \sqrt{d(E_\theta f_\omega, f_\omega)/d\theta}$$

et en désignant par M_ω l'ensemble des points θ où $p_\omega(\theta)$ existe et est $\neq 0$, que l'application

$$f = \sum_n c_n U^n f_\omega \to \sum_n c_n e^{in\theta} p_\omega(\theta) = f(\theta)$$

de $\mathfrak{M}_\omega^0$ dans $L^2(M_\omega)$ est linéaire et isométrique, de plus telle que

$$Uf \to e^{i\theta} f(\theta). \tag{3}$$

Il est aisé de voir que les fonctions ainsi obtenues $f(\theta)$ sont partout denses dans $L^2(M_\omega)$, donc l'application envisagée s'étend par continuité à une application linéaire et isométrique de $\mathfrak{M}_\omega$ *sur* $L^2(M_\omega)$; la correspondance (3) subsistera aussi après ce prolongement. Cela prouve que U_ω est unitairement équivalente à la multiplication par $e^{i\theta}$ dans $L^2(M_\omega)$.

Théorème 2 est ainsi complètement démontré.

Remarquons encore que les espaces $L^2(M_\omega)$ étant de dimension $\mathfrak{a}$ (puissance d'un ensemble dénombrablement infini) on a $\operatorname{Dim} \mathfrak{K} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{i}$ où $\mathfrak{i}$ est la puissance de l'ensemble des indices Ω. Comme d'autre part $\operatorname{Dim} \mathfrak{K} \leqq \mathfrak{a} \cdot \operatorname{Dim} \mathfrak{H}$, il s'ensuit que $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{i} \leqq \mathfrak{a} \cdot \operatorname{Dim} \mathfrak{H}$, donc

$$\mathfrak{i} \leqq \mathfrak{a} \cdot \operatorname{Dim} \mathfrak{H}. \tag{4}$$

Vu que chaque espace $L^2(M_\omega)$ peut être considéré comme un sous-espace de l'espace $L^2(0, 2\pi)$ et que $V(M_\omega) \oplus V(CM_\omega) = V(0, 2\pi)$, la dilatation unitaire U peut être prolongée, dans un certain espace $\mathfrak{K}'$, à une transformation unitaire U' qui est la somme orthogonale de $\mathfrak{i}$ répliques de l'opérateur de multiplication par $e^{i\theta}$ des fonctions $f(\theta) \in L^2(0, 2\pi)$. En augmentant au besoin le nombre de ces répliques on peut même supposer (tenant compte de (4)) que leur nombre total est égal au nombre cardinal

$$\mathfrak{i}' = \mathfrak{a} \cdot \operatorname{Dim} \mathfrak{H},$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{i}' = \mathfrak{a}$ si $\mathfrak{H}$ est séparable et $\mathfrak{i}' = \operatorname{Dim} \mathfrak{H}$ si $\mathfrak{H}$ est non séparable. La transformation unitaire U' obtenue vérifiera les conditions $T^n = \mathrm{pr}_{\mathfrak{H}} U'^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ mais en général $\mathfrak{K}'$ ne sera plus déterminé par les éléments de la forme $U'^n h$ $(h \in \mathfrak{H};\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

2. Cas d'un semi-groupe à un paramètre de contractions

Passons à l'étude analogue d'un semi-groupe continu $\{T_s\}_{s \geqq 0}$ de contractions de $\mathfrak{H}$ et sa dilatation unitaire $\{U_s\}_{-\infty < s < \infty}$ qui est un groupe continu à un paramètre de transformations unitaires d'un certain espace $\mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{H}$, tel que

$$T_s = \mathrm{pr}_{\mathfrak{H}} U_s \qquad (s \geqq 0)$$

et $\mathfrak{K}$ est sous-tendu par les éléments de la forme $U_s h$ $(h \in \mathfrak{H};\ s$ réel$)$; la structure $\{\mathfrak{K}, U_s, \mathfrak{H}\}$ est alors déterminée à isomorphie près[6]).

La dilatation unitaire d'une somme orthogonale $\bigoplus\limits_\omega T_s^{(\omega)}$ de semi-groupes continus de contraction est évidemment égale à la somme orthogonale $\bigoplus\limits_\omega U_s^{(\omega)}$ des dilatations unitaires correspondantes.

Un semi-groupe $\{T_s\}$ de transformations linéaires bornées de $\mathfrak{H}$ sera dit *complètement non-unitaire* si pour tout $h \in \mathfrak{H}$, $h \neq 0$, au moins une des fonctions $\|T_s h\|, \|T_s^* h\|$ de s $(0 \leqq s < \infty)$ n'est pas constamment égale à $\|h\|$.

[6]) Cf. [2—5].

Théorème 3. *A tout semi-groupe continu* $\{T_s\}_{s\geqq 0}$ *de l'espace* $\mathfrak{H}$ *correspond une décomposition de* $\mathfrak{H}$ *en somme orthogonale des deux sous-espaces orthogonaux complémentaires* $\mathfrak{H}^{(u)}$ *et* $\mathfrak{H}^{(0)}$ [7]) *réduisant les transformations* T_s *et tels que les parties de* T_s *dans* $\mathfrak{H}^{(u)}$ *et* $\mathfrak{H}^{(0)}$ *forment, selon les cas, un semi-groupe unitaire* $\{T_s^{(u)}\}$ *et un semi-groupe complètement non-unitaire* $\{T_s^{(0)}\}$. *Cette décomposition est unique,* $\mathfrak{H}^{(u)}$ *étant constitué des éléments* h *pour lesquels*

$$\|T_s h\| = \|h\| = \|T_s^* h\| \quad \textit{pour tout} \quad s \geqq 0. \tag{5}$$

$\{T_s^{(u)}\}$ et $\{T_s^{(0)}\}$ seront appelés la *partie unitaire* et la *partie complètement non-unitaire* du semi-groupe $\{T_s\}$.

Démonstration. Faisant intervenir la dilatation unitaire $\{U_s\}_{-\infty<s<\infty}$ de $\{T_s\}_{s\geqq 0}$ on montre d'abord que l'ensemble $\mathfrak{H}^{(u)}$ des éléments $h \in \mathfrak{H}$ vérifiant (5) peut être représenté sous la forme

$$\mathfrak{H}^{(u)} = \bigcap_{-\infty < s < \infty} U_{-s}\mathfrak{H},$$

ce qui met en évidence que cet ensemble est un sous-espace de $\mathfrak{H}$, appliqué par chaque U_t sur lui-même. On achève la démonstration tout comme celle du théorème 1.

Comme un corollaire du théorème 3 on peut affirmer que la dilatation unitaire $\{U_s\}$ de $\{T_s\}$ est égale à la somme orthogonale de $\{T_s^{(u)}\}$ et de la dilatation unitaire $\{U_s^{(0)}\}$ de $\{T_s^{(0)}\}$. Cela impose le problème d'étudier de plus près les dilatations unitaires des semi-groupes de contractions complètement non-unitaires. Cette étude peut être réduite au cas envisagé dans le théorème 2 si l'on fait intervenir les *cogénératices* des semi-groupes en question [8]).

Lemme. *La décomposition de l'espace* $\mathfrak{H}$ *qui correspond au semi-groupe continu de contractions* $\{T_s\}$, *au sens du théorème 3, est la même que celle qui correspond à la cogénératrice* T *de ce semi-groupe, au sens du théorème 1.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{(u)} \oplus \mathfrak{H}^{(0)}$ la décomposition correspondant à $\{T_s\}$ au sens du théorème 3, et soient T, T', T'' les cogénératrices des semi-groupes $\{T_s\}$, $\{T_s^{(u)}\}$, $\{T_s^{(0)}\}$; ces sont des contractions dans les espaces $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}^{(u)}$, $\mathfrak{H}^{(0)}$, selon les cas, et on a évidemment $T = T' \oplus T''$. T est unitaire puisque le semi-groupe $\{T_s\}$ est unitaire (cf. [5], th. 4); montrons que T'' est complètement non-unitaire. En effet, si T'' avait la partie unitaire $T''^{(u)}$ non banale, c'est-à-dire définie dans un sous-espace $\mathfrak{H}^{(1)}$ de $\mathfrak{H}^{(0)}$ constitué non seulement de l'élément 0, alors $\mathfrak{H}^{(1)}$ réduirait aussi le semi-groupe $\{T_s^{(0)}\}$, et la partie de $\{T_s^{(0)}\}$ dans $\mathfrak{H}^{(1)}$, ayant sa cogénératrice $T''^{(u)}$ unitaire, serait

7) $\mathfrak{H}^{(u)}$ ou $\mathfrak{H}^{(0)}$ peut se réduire au seul élément 0.

8) Cf. [5], chap. II.

lui-même unitaire (cf. [5], th. 4), ce qui contredit à ce que $\{T_s^{(\prime\prime)}\}$ est un semi-groupe complètement non-unitaire. Par conséquent T' et T'' coïncident avec les parties unitaire et complètement non-unitaire de T, c. q. f. d.

Envisageons alors un groupe continu de contractions $\{T_s\}$ dans l'espace $\mathfrak{H}$, complètement non-unitaire. Soit $\{U_s\}$ la dilatation unitaire de $\{T_s\}$ dans un certain espace $\mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{H}$. Soient T et U les cogénératrices correspondantes. D'après le lemme, T est une contraction complètement non-unitaire de $\mathfrak{H}$, tandis que U est une transformation unitaire de $\mathfrak{K}$ (cf. [5], th. 4). En vertu de la relation

$$U_s = \exp[s(U+1)(U-1)^{-1}]$$

entre le semi-groupe unitaire $\{U_s\}$ et sa cogénératrice U (cf. [5], p. 35—36) les familles spectrales $\{E_\theta\}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ et $\{F_x\}$ $(-\infty < x < \infty)$ correspondant à U et à U_s par les formules

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} dE_\theta \quad \text{et} \quad U_s = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} dF_x\,^{9)}$$

sont liées l'une à l'autre par la relation

$$F_x = E_{2\,\mathrm{arc\,tg}\,x} \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Or, d'après un théorème général (cf. [5], th. 5) la cogénératrice U de $\{U_s\}$ est égale à la dilatation unitaire de la cogénératrice T de $\{T_s\}$. Donc U est la dilatation unitaire d'une contraction complètement non-unitaire, d'où il résulte en appliquant le théorème 2:

Théorème 4. *La dilatation unitaire $\{U_s\}$ d'un semi-groupe à un paramètre de contractions $\{T_s\}$, complètement non-unitaire, a son spectre absolument continu. D'une manière plus précise, $\{U_s\}$ est unitairement équivalent à une somme orthogonale de type $\bigoplus_{\omega \in \Omega} \{V_s(M_\omega)\}$, où $V_s(M_\omega)$ désigne la multiplication par e^{isx} dans l'espace $L^2(M_\omega)$ des fonctions $f(x)$ définies dans un ensemble mesurable $M_\omega \subseteqq (-\infty, \infty)$.*

Des remarques additionnelles, analogues à celles faites à la fin du paragraphe précédent, s'appliquent aussi dans ce cas.

---

9) On y ajoute la condition de continuité de droite de E_θ et que $E_0 = O$.

Ouvrages cités

[1] F. et M. Riesz, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, *Quatrième Congrès des math. scandinaves*, **1956**, 27—44.

[2] B. Sz-Nagy, *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace.* Appendice au livre "Leçons d'analyse fonctionnelle" par F. Riesz et B. Sz.-Nagy (Budapest, 1955).

[3] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953), 87—92.

[4] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. II, *ibidem*, **18** (1957), 1—15.

[5] ——— et C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. III, *ibidem*, **19** (1958) 26—45.

(Reçu le 26 février 1960)